Воропай Алексей Валериевич, к.т.н., доцент, voropay@mail.ru
Малахов Евгений Сергеевич, аспирант,malahov1234@gmail.com
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Исследуется нестационарное нагружение консольной балки средней толщины в рамках гипотез Тимошенко. Балка предполагается упругой изотропной и имеющей прямоугольное сечение. Материал балки – титановый сплав, поэтому диссипацией энергии в процессе деформирования можно пренебречь. Нестационарное деформирование балки вызывает внешняя ударная нагрузка, приложенная в некоторой точке ортогонально к срединной линии. В литературе известно аналитическое решение краевой задачи для балки, один конец которой имеет жесткое защемление, а второй – свободен. Однако это решение получено для тонких балок в рамках классической теории [1] и имеет аналитические выражения только для прогибов балки записанных в функциях Крылова. В случае балки Тимошенко имеется отличие исходных гипотез деформирования, учитывающих сдвиг и инерцию вращения поперечного сечения, и кроме функции прогибов $w(x,t)$ появляется дополнительная независимая функция углов поворота нормали $\psi(x,t)$. Построение аналитического решения краевой задачи (даже в случае статического нагружения) для консольной балки в принципе возможно, но само по себе является сложной и громоздкой задачей.

Поэтому в настоящей работе используется метод компенсирующих нагрузок. А именно, рассматривается шарнирно опертая балка, для которой разложение по собственным формам совпадает с тригонометрическим рядом по синусам, то есть имеется простейшее аналитическое решение.

Суть метода состоит в том, что к этой шарнирной балке прикладываются дополнительные сосредоточенные усилия и моменты так, чтобы выполнялись требуемые условия на краях (см. рис. 1). Отметим, что в динамических задачах эти компенсирующие нагрузки являются функциями времени. В нестационарных задачах определение изменения во времени этих функций представляет некоторые трудности, так как их определение базируется на решении обратной задачи механики деформируемого твердого тела, которое сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра и является некорректной задачей математической физики. В рассматриваемой задаче количество интегральных уравнений соответствует количеству дополнительно введенных компенсирующих нагрузок и равняется трём (два сосредоточенных момента и одна сила).

Для моделирования жесткой заделки к шарнирно опертому краю балки достаточно добавить один сосредоточенный момент: $M_A(x,t) = M_A^C(t)\cdot\delta(x-x_A)$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, таким образом, чтобы для каждого момента времени выполнялось условие: $\psi(0,t)=0$.

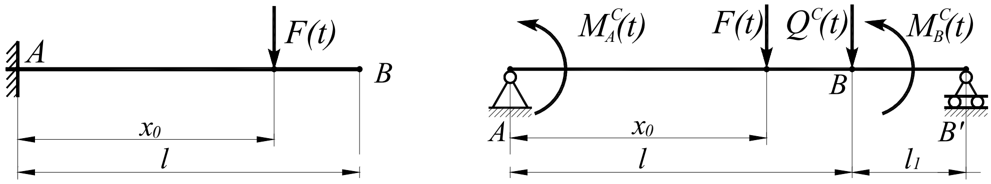

Рис. 1. Замена консольной балки шарнирно опёртой

Отдельно выделим моделирование свободного края, так как одними компенсирующими нагрузками невозможно из шарнирно опертого края получить свободный, поэтому метод компенсирующих нагрузок должен использоваться совместно с методом расширенного поля. Например, для моделирования колебаний консольной балки *AB* конечной длины l необходимо рассмотреть колебания шарнирно опертой балки большей длины ($l+l_1$), где l_1 длина дополнительного участка балки, которая определяется из решения соответствующей задачи оптимизации. Таким образом, для моделирования свободного края в нужной точке удлинённой балки (соответствующей концу консольной балки) добавлены две компенсирующих нагрузки:

– сосредоточенный момент $M_B(x,t) = M_B^C(t)\cdot\delta(x-x_B)$

– сосредоточенную поперечную силу $Q_B(x,t) = Q_B^C(t)\cdot\delta(x-x_B)$, такие, чтобы в точке *B* выполнялись следующие условия:

– $Q(l,t)=0$, что соответствует кинематическому условию $\dfrac{\partial w(l,t)}{\partial x} - \psi(l,t) = 0$;

– $M(l,t)=0$, что соответствует кинематическому условию $\varepsilon(l,t) = \dfrac{\partial\psi(l,t)}{\partial x} = 0$,

Указанные условия при неизвестных компенсирующих нагрузках являются интегральными уравнениями Вольтерра I рода. Для их определения необходимо решать систему 3-х интегральных уравнений которая решается численно-аналитически с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова [2]. В результате определяются три неизвестных функции изменения во времени компенсирующих нагрузок. Далее, зная внешнюю возмущающую нагрузку и три компенсирующих нагрузки, можно определять компоненты перемещений и деформации в любой точке балки на основе метода суперпозиции (как если бы на исследуемую шарнирную балку действовало 4 внешних нагрузки).

Литература

1. Власов В. З., и Н. Н. Леонтьев. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960 – 492 с.

2. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.